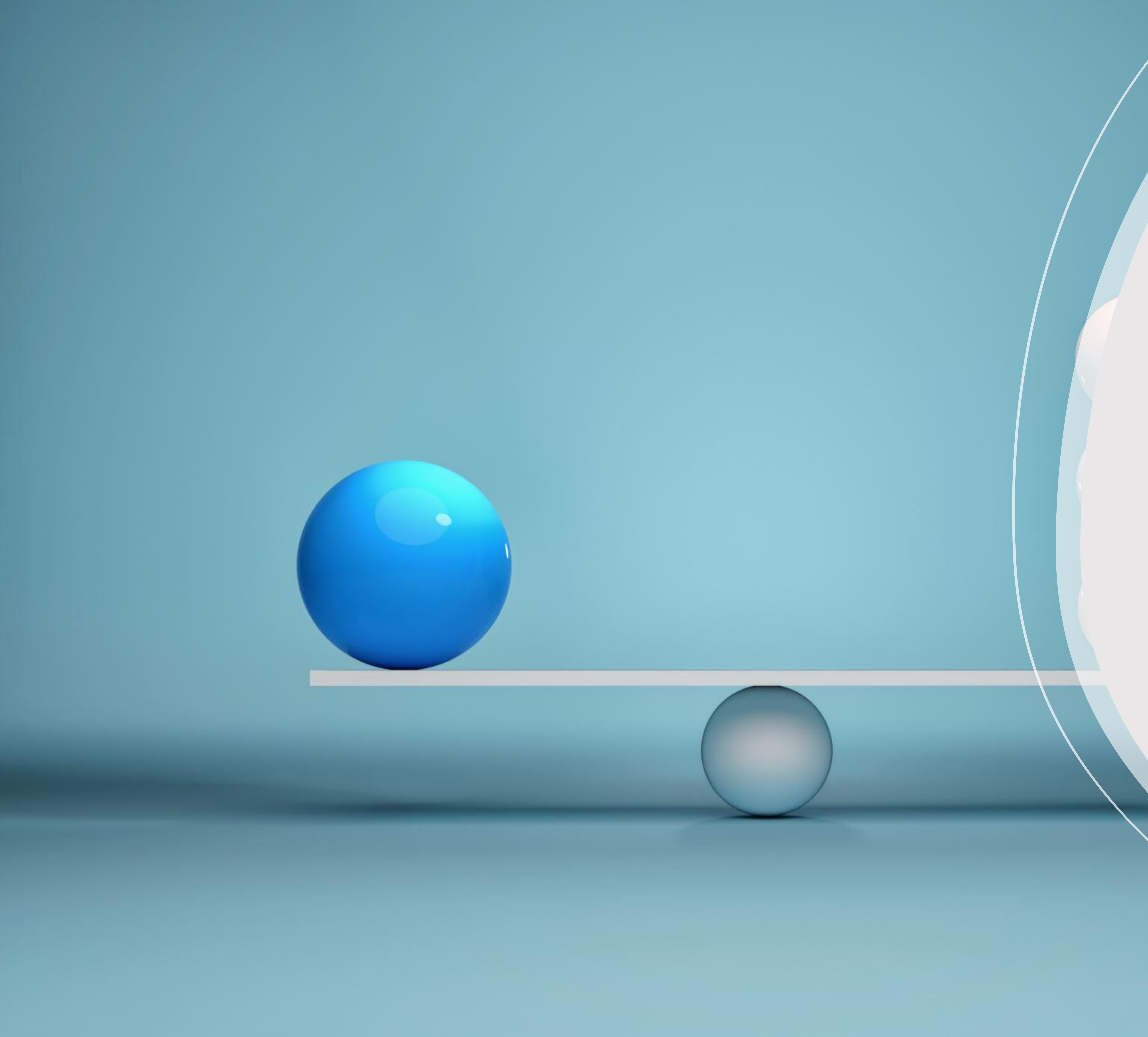
INSTITUTO FEDERAL
Sertão Pernambucano
Campus Petrolina Zona Rural

Aula 5 – Empuxo em superfícies planas submersas

Prof. José Sebastião Costa de Sousa
Dr. Engenharia Agrícola
CPZR/IFSertãoPE



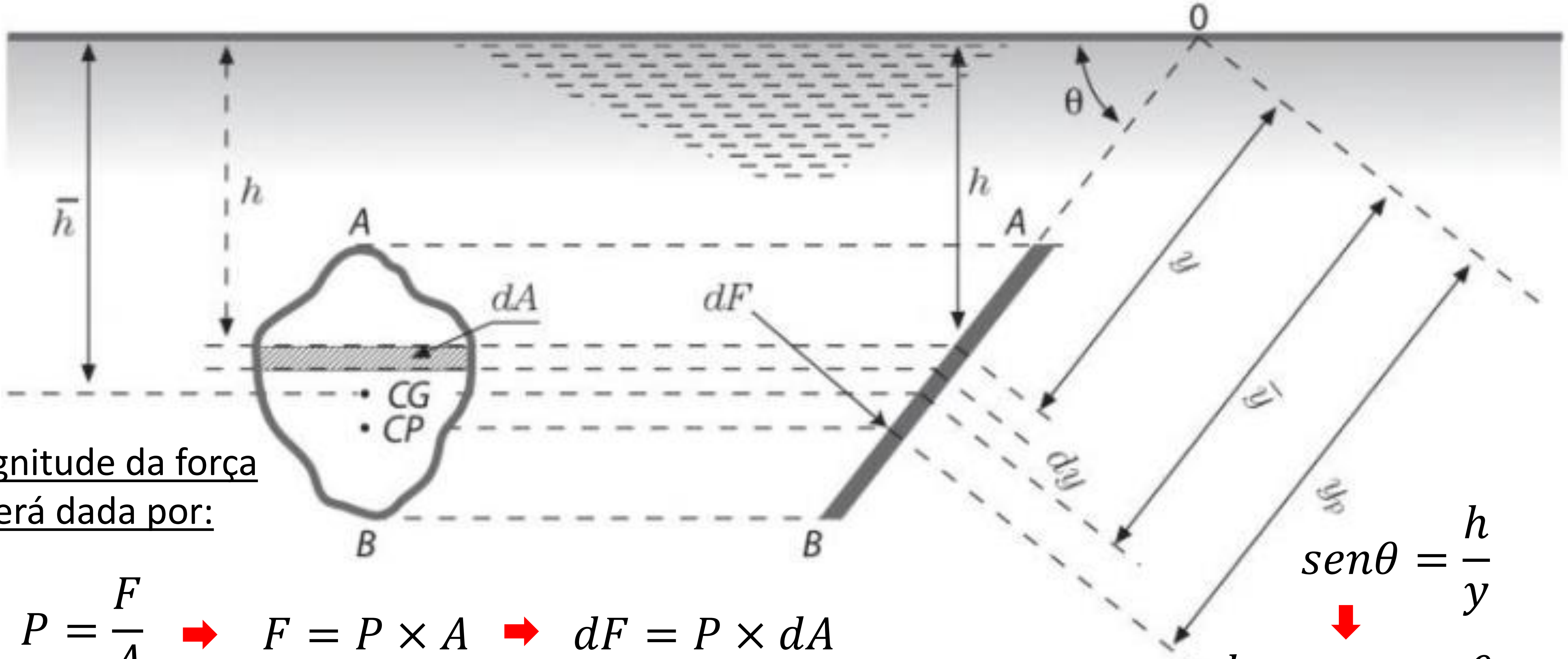
Sumário

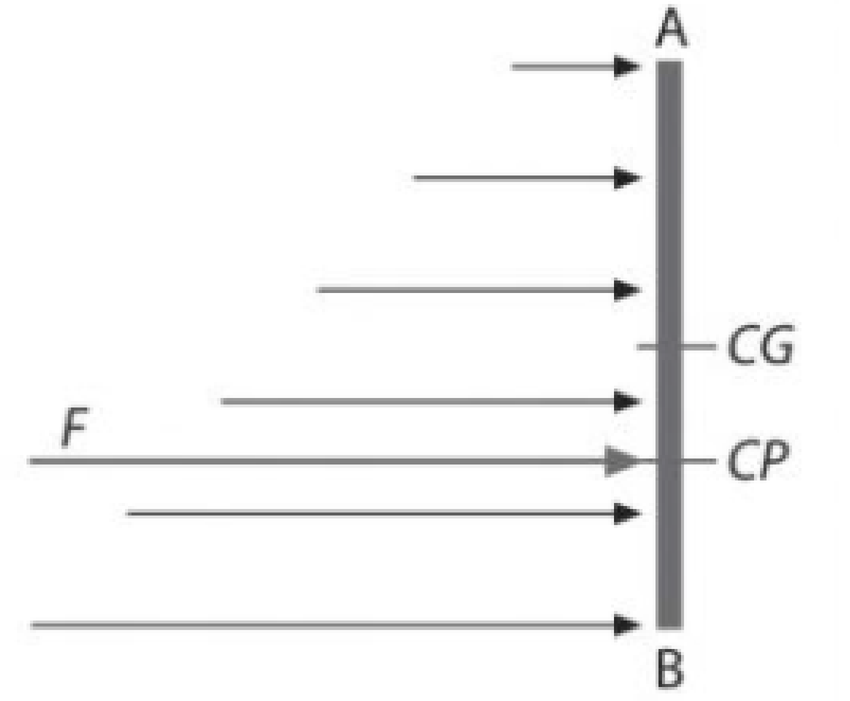
- ✓ Centro de gravidade e de pressão
- ✓ Momento de inercia
- ✓ Aplicação a muros de retenção
- ✓ Equilíbrio de corpos flutuantes

Empuxo em superfícies planas submersas

O elemento delimitado A-B é uma comporta submersa com área A, θ é o ângulo formado pelo eixo de sustentação com a horizontal, h a profundidade, F a força, CG é o centro de gravidade e CP o centro de pressão.

O elemento de área dA está localizado a profundidade h e dista y da superfície no plano do eixo de sustentação.





A magnitude da força F será dada por:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = P \times A \Rightarrow dF = P \times dA$$

$$sen\theta = \frac{h}{y} \Rightarrow h = y \times sen\theta$$

$$P = \rho \times g \times h = \gamma \times h$$

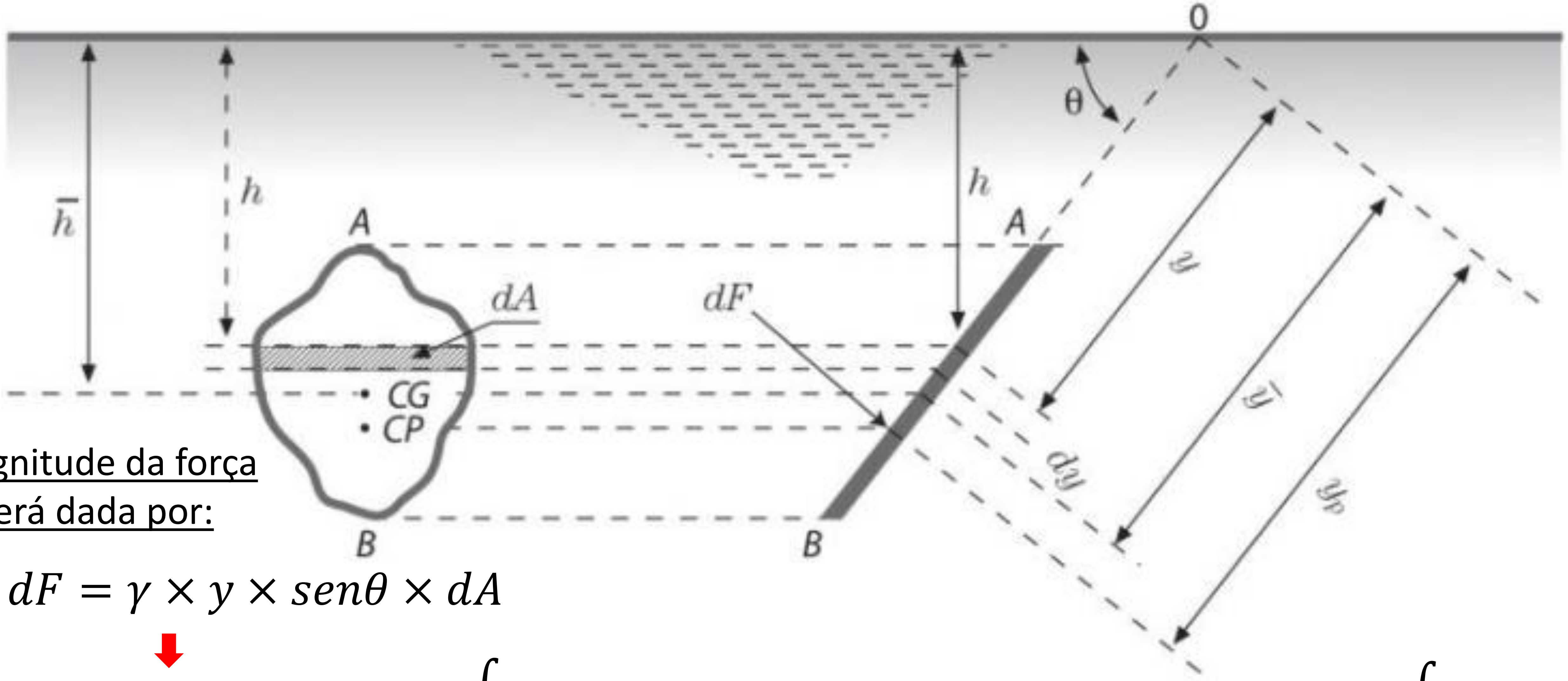
$$dF = \gamma \times h \times dA \Rightarrow dF = \gamma \times y \times sen\theta \times dA \Rightarrow F = \int dF$$

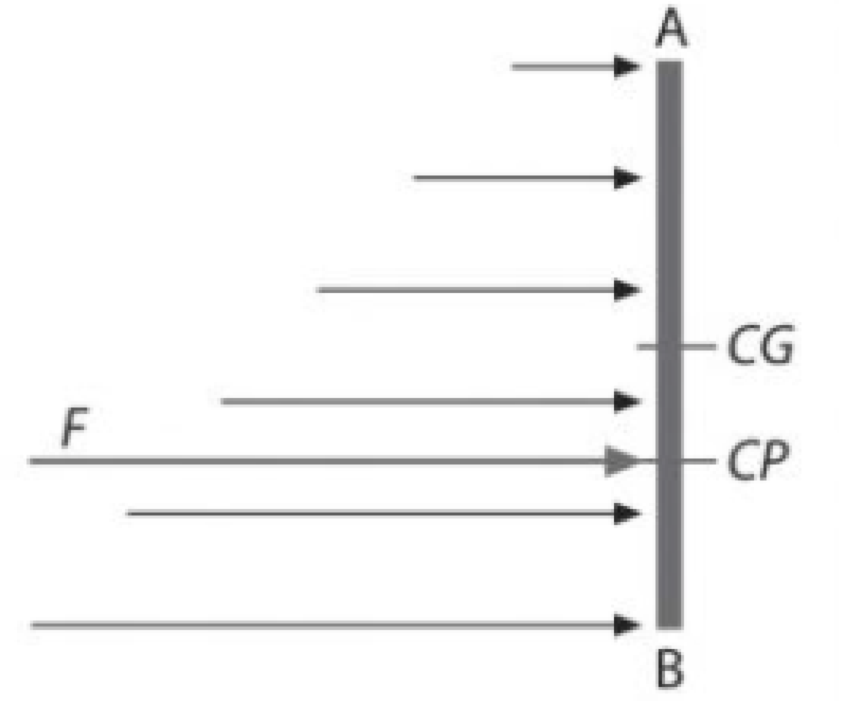
https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Empuxo em superfícies planas submersas

O elemento delimitado A-B é uma comporta submersa com área A, θ é o ângulo formado pelo eixo de sustentação com a horizontal, h a profundidade, F a força, CG é o centro de gravidade e CP o centro de pressão.

O elemento de área dA está localizado a profundidade h e dista y da superfície no plano do eixo de sustentação.





A magnitude da força F será dada por:

$$dF = \gamma \times y \times sen\theta \times dA$$

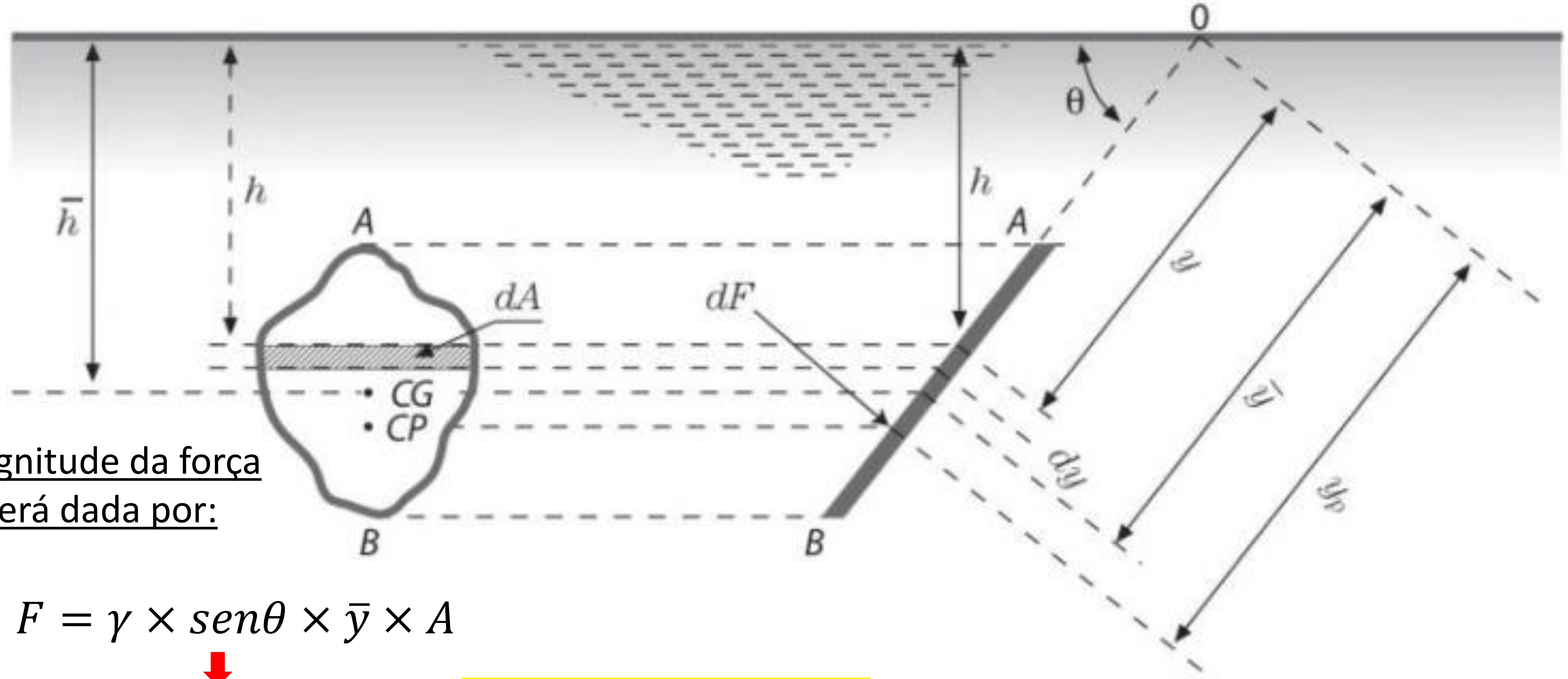
$$F = \int dF \rightarrow F = \int_A \gamma \times y \times sen\theta \times dA \rightarrow F = \gamma \times sen\theta \times \int_A y \times dA \rightarrow F = \gamma \times sen\theta \times \bar{y} \times A$$

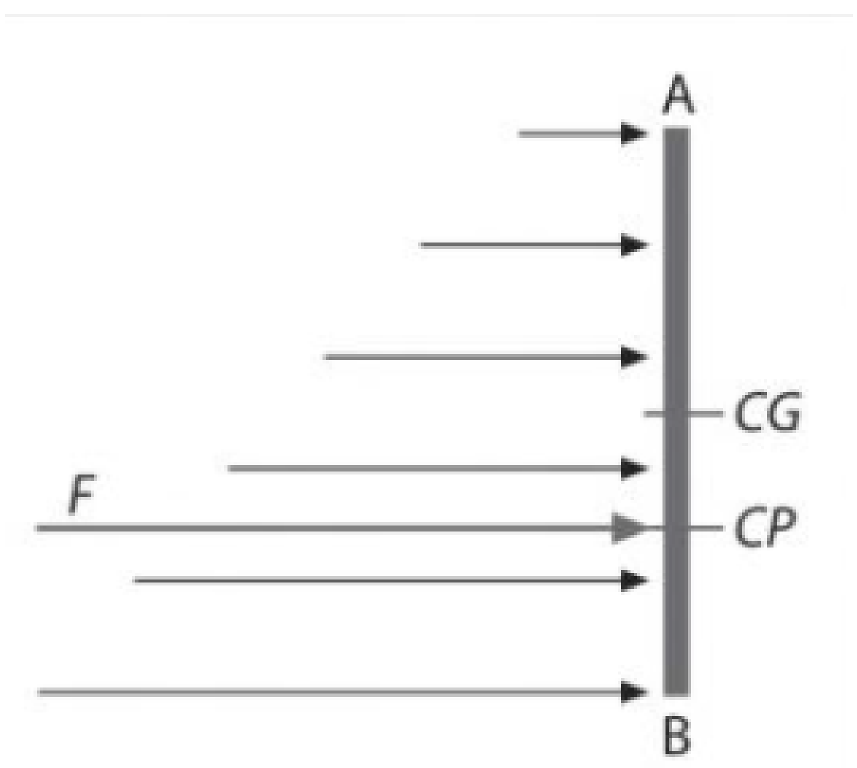
https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Empuxo em superfícies planas submersas

O elemento delimitado A-B é uma comporta submersa com área A, θ é o ângulo formado pelo eixo de sustentação com a horizontal, h a profundidade, F a força, CG é o centro de gravidade e CP o centro de pressão.

O elemento de área dA está localizado a profundidade h e dista y da superfície no plano do eixo de sustentação.





A magnitude da força F será dada por:

$$F = \gamma \times sen\theta \times \bar{y} \times A$$

$$sen\theta \times \bar{y} = \bar{h} \longrightarrow \boxed{F = \gamma \times \bar{h} \times A}$$

Esta é a força de empuxo sobre a peça.

Ela, porém, não é aplicada no centro de gravidade e sim no centro de pressão

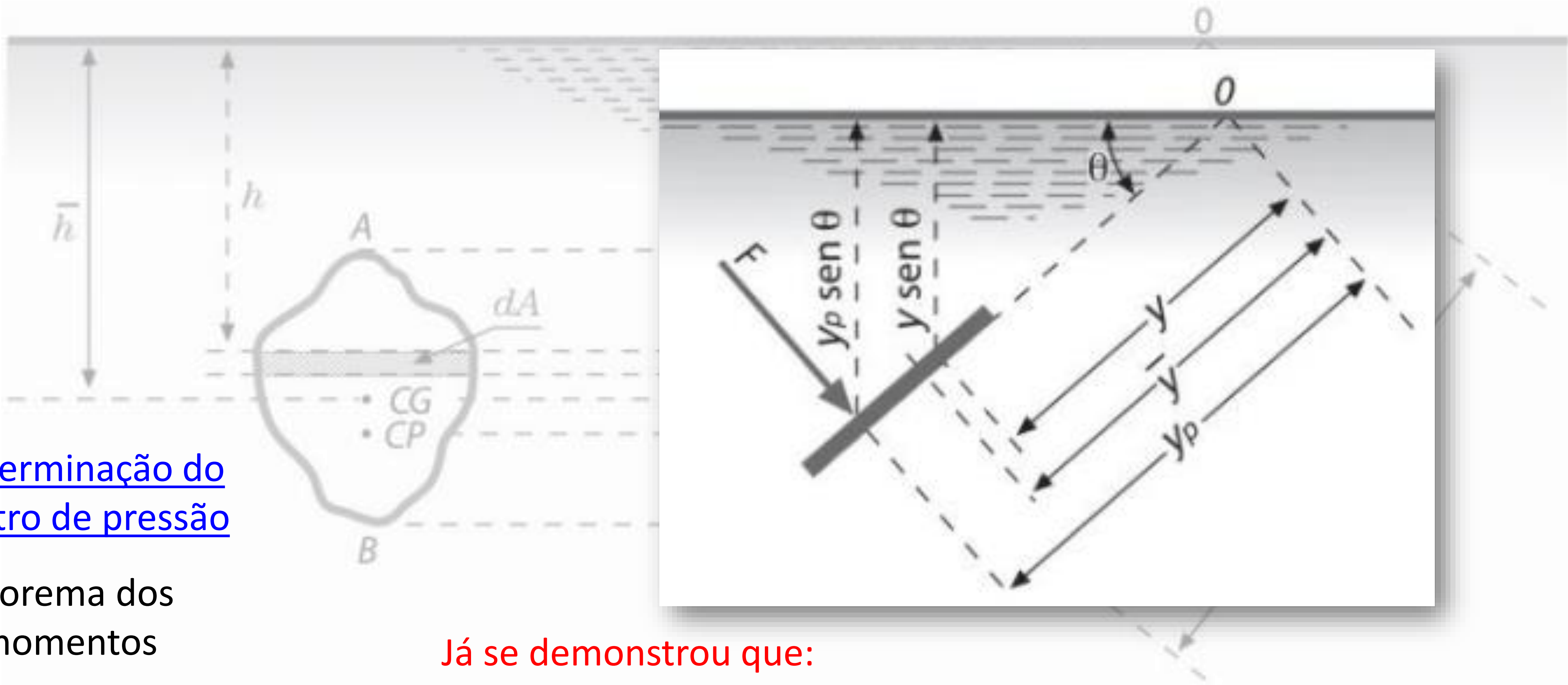
Para obtê-lo:

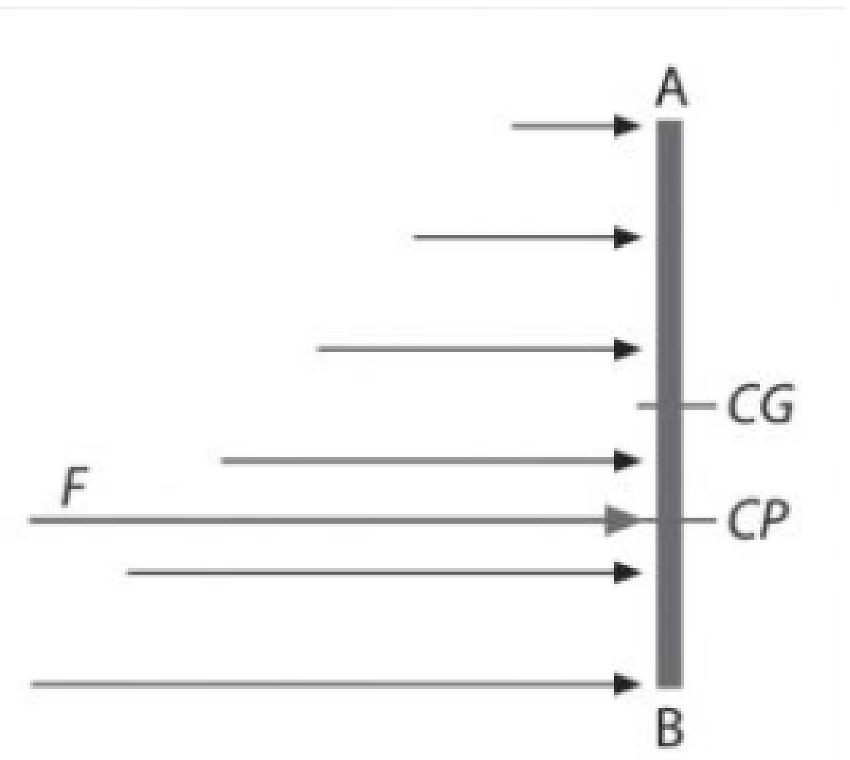
https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Empuxo em superfícies planas submersas

O elemento delimitado A-B é uma comporta submersa com área A, θ é o ângulo formado pelo eixo de sustentação com a horizontal, h a profundidade, F a força, CG é o centro de gravidade e CP o centro de pressão.

O elemento de área dA está localizado a profundidade h e dista y da superfície no plano do eixo de sustentação.





[Determinação do centro de pressão]

Teorema dos momentos

$$F \times yp = dF \times y$$

$$F \times yp = \int dF \times y$$

Já se demonstrou que:

$$dF = \gamma \times sen\theta \times y \times dA$$

$$F = \gamma \times sen\theta \times \bar{y} \times A$$

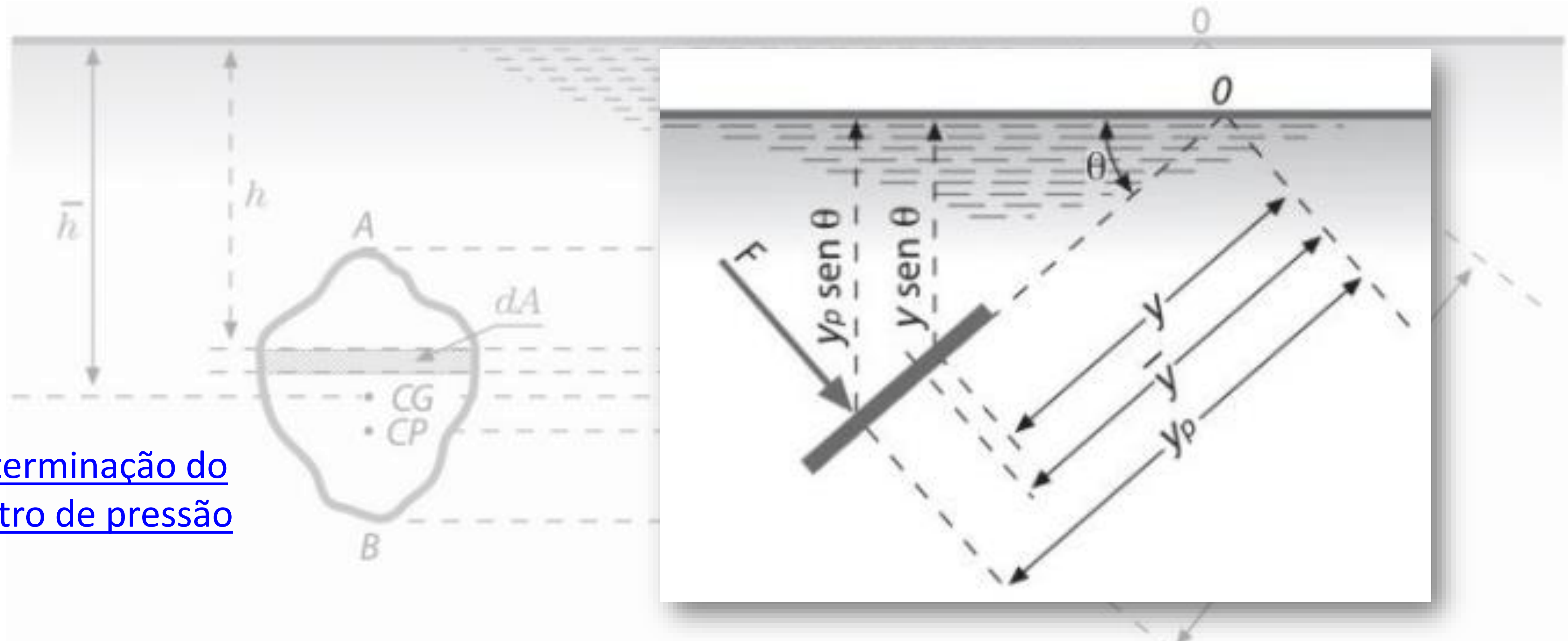
$$\gamma \times sen\theta \times \bar{y} \times A \times yp = \int_A \gamma \times sen\theta \times y \times dA \times y$$

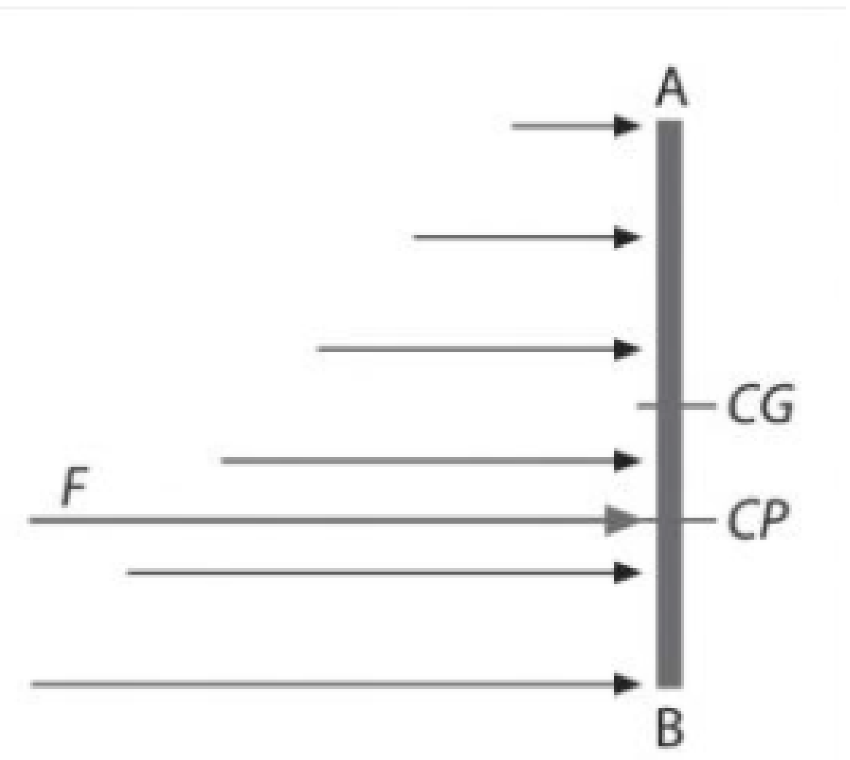
https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Empuxo em superfícies planas submersas

O elemento delimitado A-B é uma comporta submersa com área A, θ é o ângulo formado pelo eixo de sustentação com a horizontal, h a profundidade, F a força, CG é o centro de gravidade e CP o centro de pressão.

O elemento de área dA está localizado a profundidade h e dista y da superfície no plano do eixo de sustentação.





[Determinação do centro de pressão]

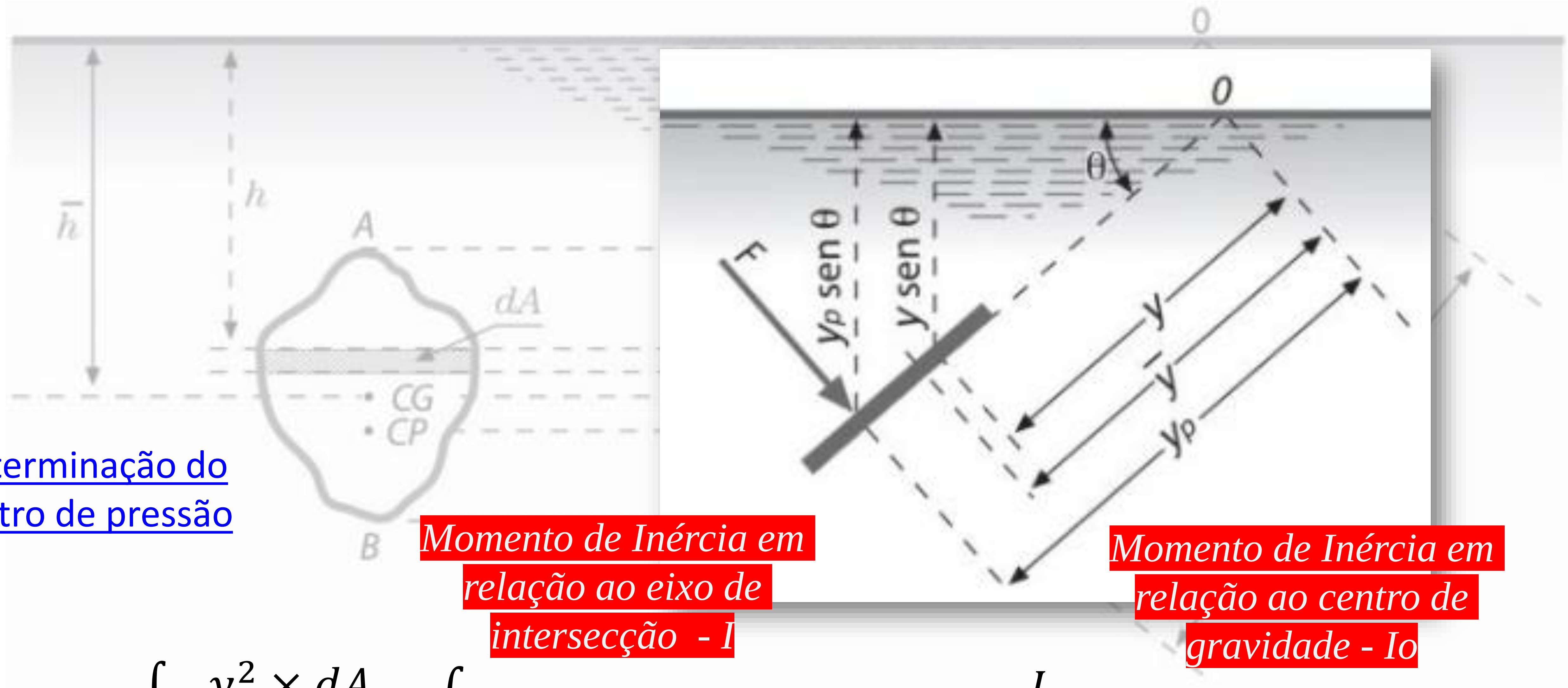
$$\gamma \times sen\theta \times \bar{y} \times A \times yp = \gamma \times sen\theta \times \int_A y^2 \times dA \Rightarrow y_p = \frac{\gamma \times sen\theta \times \int_A y^2 \times dA}{\gamma \times sen\theta \times \bar{y} \times A} \Rightarrow y_p = \frac{\int_A y^2 \times dA}{\bar{y} \times A}$$

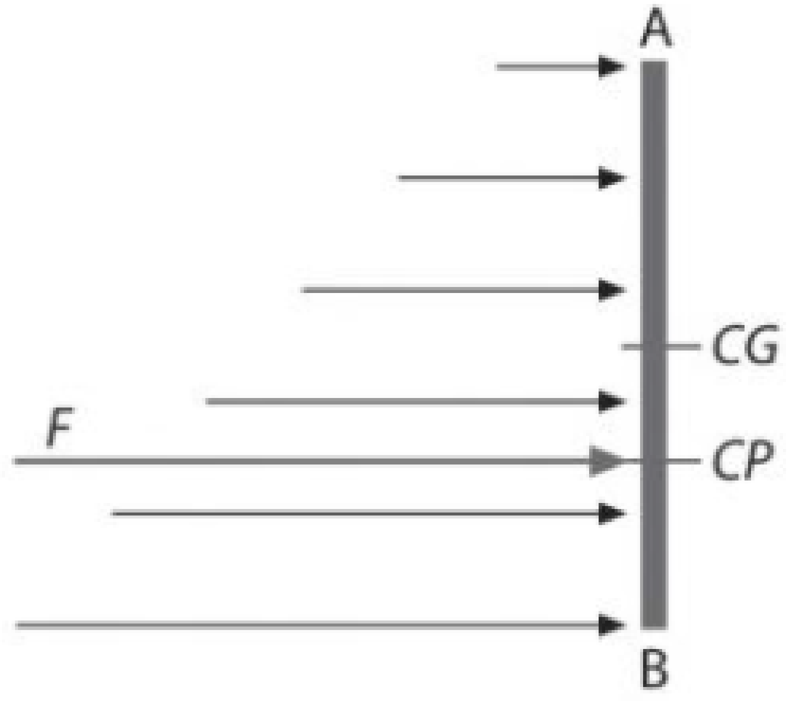
https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Empuxo em superfícies planas submersas

O elemento delimitado A-B é uma comporta submersa com área A, θ é o ângulo formado pelo eixo de sustentação com a horizontal, h a profundidade, F a força, CG é o centro de gravidade e CP o centro de pressão.

O elemento de área dA está localizado a profundidade h e dista y da superfície no plano do eixo de sustentação.





Determinação do centro de pressão

Momento de Inércia em relação ao eixo de intersecção - I

Momento de Inércia em relação ao centro de gravidade - Io

$$y_p = \frac{\int_A y^2 \times dA}{\bar{y} \times A} \qquad \int_A y^2 \times dA = I \;\Rightarrow\; y_p = \frac{I}{\bar{y} \times A}$$

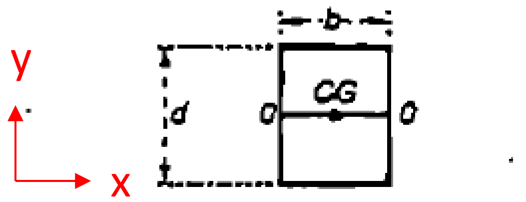
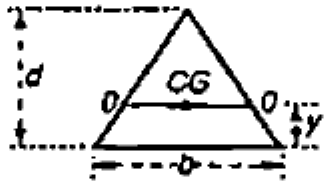
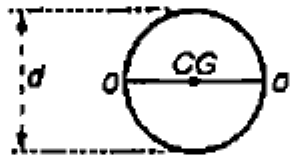
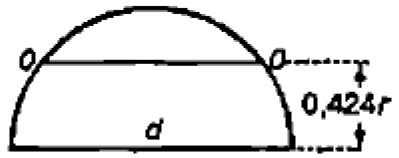
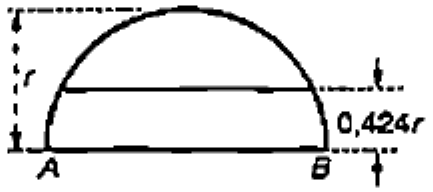
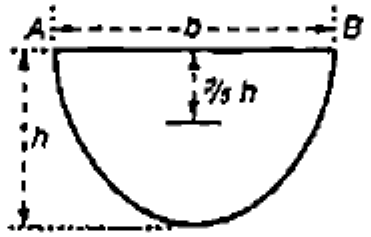
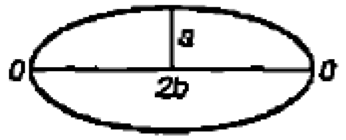
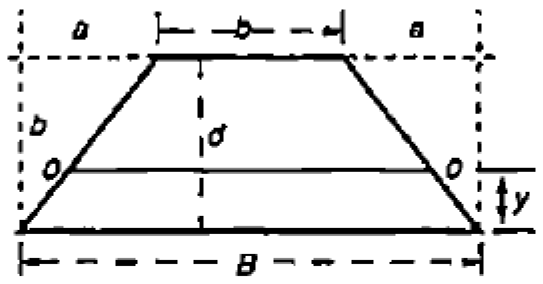
$$I = Io + A \times \bar{y}^2 \;\Rightarrow\; y_p = \frac{Io + A \times \bar{y}^2}{\bar{y} \times A}$$

$$\boxed{y_p = \bar{y} + \frac{Io}{\bar{y} \times A}}$$

https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Momento de inércia e posição do centro de gravidade

QUADRO 2.1 — Momentos de inércia (I_0). Área (A) e centros de gravidade (CG) das principais figuras*

Figura e		I_0	A	CG
Retângulo		$\frac{1}{12}bd^3$	bd	$x = \frac{1}{2}b$ $y = \frac{1}{2}d$
Triângulo isósceles		$\frac{1}{36}bd^3$	$\frac{1}{2}bd$	$x = \frac{1}{2}b$ $y = \frac{1}{3}d$
Círculo		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^2}{4}$	$x = y = \frac{d}{2}$
Semicírculo		$0{,}00686d^4$	$\frac{\pi d^2}{8}$	$x = \frac{d}{2}$ $y = 0{,}4244\frac{d}{2}$
Semicírculo		$\frac{\pi r^4}{8}$ Eixo vertical	$\frac{\pi r^2}{2}$	$x = r$ $y = 0{,}4244\,r$
Parábola		$\frac{b}{2}h^3$	$\frac{\pi}{2}\cdot h\cdot\frac{b}{2}$	$x = \frac{b}{2}$ $y = h\cdot\frac{2}{5}$
Elipse		$\frac{\pi a^3 b}{4}$	πab	$x = a$ $y = b$
Trapézio isósceles		$\frac{d^3}{36}\cdot\frac{B^2+4Bb+b^2}{B+b}$	$\frac{B+b}{2}\times d$	$x = \frac{B+b}{4}$ $y = \frac{d}{3}\cdot\frac{B+2b}{B+b}$

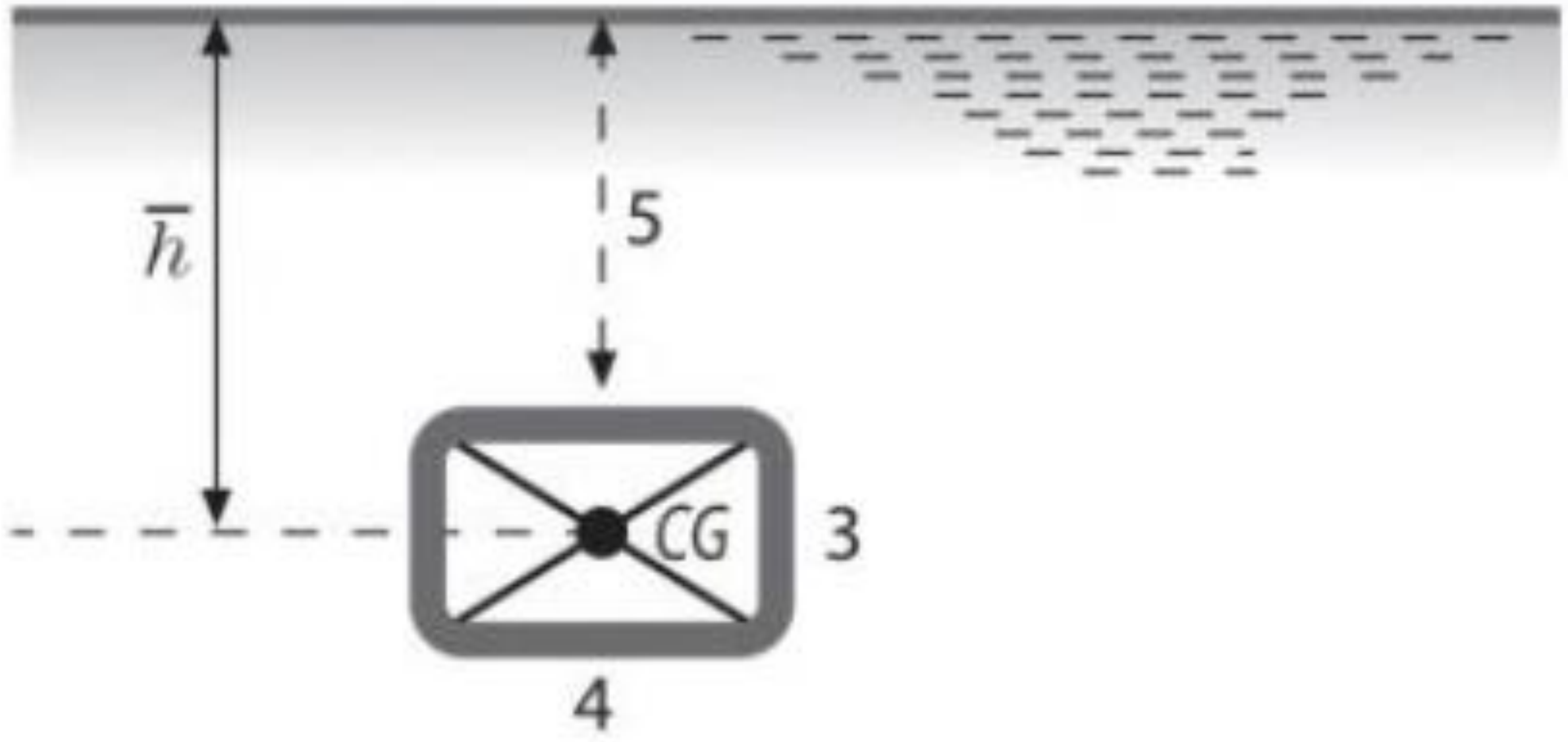
* Relativos aos eixos O-O ou A-B, indicados (eixos neutros)

https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Exercícios resolvidos do livro Manual de Hidráulica

Qual o empuxo exercido pela água em uma comporta vertical, de 3 × 4 m, cujo topo se encontra a 5 m de profundidade? *Figura A-2-a*.

Determinar a posição do centro de pressão para o caso da comporta indicada no exercício *A-2-a* (*Figura A-2-a*).



Solução:

$$\gamma_a = 9{,}8 \times 10^3 \text{ N/m}^3 \text{ (água)}$$

$$F = \gamma \times \bar{h} \times A$$

$$F = 9{,}8 \times 10^3 \times 6{,}5 \times 12 = 764.400 \text{ N}$$

Solução:

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_0}{A \times \bar{y}} \qquad I_0 = \frac{b \times d^3}{12}$$

Logo,

$$y_p = 6{,}50 + \frac{\frac{1}{12} \times 4 \times 3^3}{3 \times 4 \times 6{,}5} = 6{,}50 + \frac{9}{78} = 6{,}515 \text{ m}$$

Aplicação a pequenos muros de retenção

A-2.7 APLICAÇÃO: CÁLCULO DE PEQUENOS MUROS DE RETENÇÃO E BARRAGENS

Seja, por exemplo, o pequeno paramento vertical de alvenaria de pedra (γ') e de forma retangular da *Figura A-2.7-a*, sujeito apenas a tombamento.

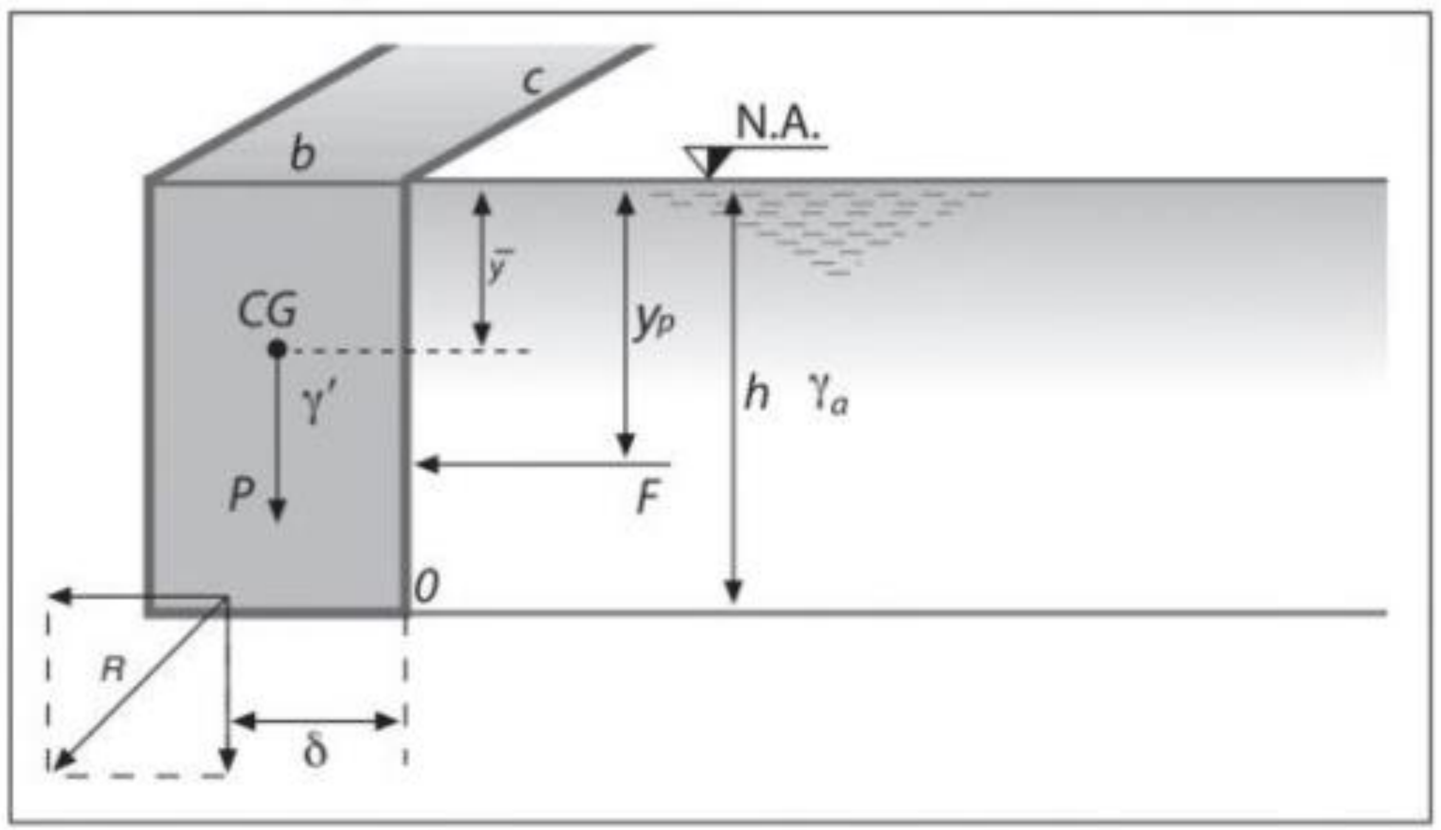


Figura A-2.7-a – Esforços em um muro de retenção.

a) Cálculo do empuxo

$$F = \gamma_a \times \bar{y} \times A$$

$$F = c \times h \times \gamma_a \times \frac{h}{2} = \frac{c \times h^2 \times \gamma_a}{2}$$

b) Determinação do ponto de aplicação

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_0}{A \times \bar{y}} = \frac{h}{2} + \frac{c \times h^3}{12 \times c \times h \times \frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{4 \times h}{6} = \frac{2}{3} \times h$$

c) Dimensionamento do muro

O muro deve resistir ao empuxo da água. Como se trata de alvenaria que não deve trabalhar à tração, a resultante das forças F e P deve cair no terço médio da base ($\delta = (2/3) \times b$). Tomando os momentos com relação ao ponto 0,

https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

$$P \times \frac{b}{2} + F \times \frac{h}{3} = M$$

$$P = b \times c \times h \times \gamma'$$

γ' = peso específico de alvenaria

$$F = \frac{c \times h^2 \times \gamma_a}{2}$$ ← Do item (a)

γ_a = peso específico da água

$$M = \frac{b^2 \times c \times h \times \gamma'}{2} + \frac{c \times h^3 \times \gamma_a}{6} =$$

$$= \delta \times R = \frac{2}{3} \times b \times b \times c \times h \times \gamma'$$

$$\frac{b^2 \times \gamma'}{2} + \frac{h^2 \times \gamma_a}{6} = \frac{2}{3} \times b^2 \times \gamma'$$

$$\frac{2}{3} \times b^2 \times \gamma' - \frac{1}{2} \times b^2 \times \gamma' = \frac{h^2 \times \gamma_a}{6}$$

$$\frac{1}{6} \times b^2 \times \gamma' = \frac{h^2 \times \gamma_a}{6} \therefore b = \sqrt{\frac{h^2 \times \gamma_a}{\gamma'}} \qquad b = h \times \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma'}}$$

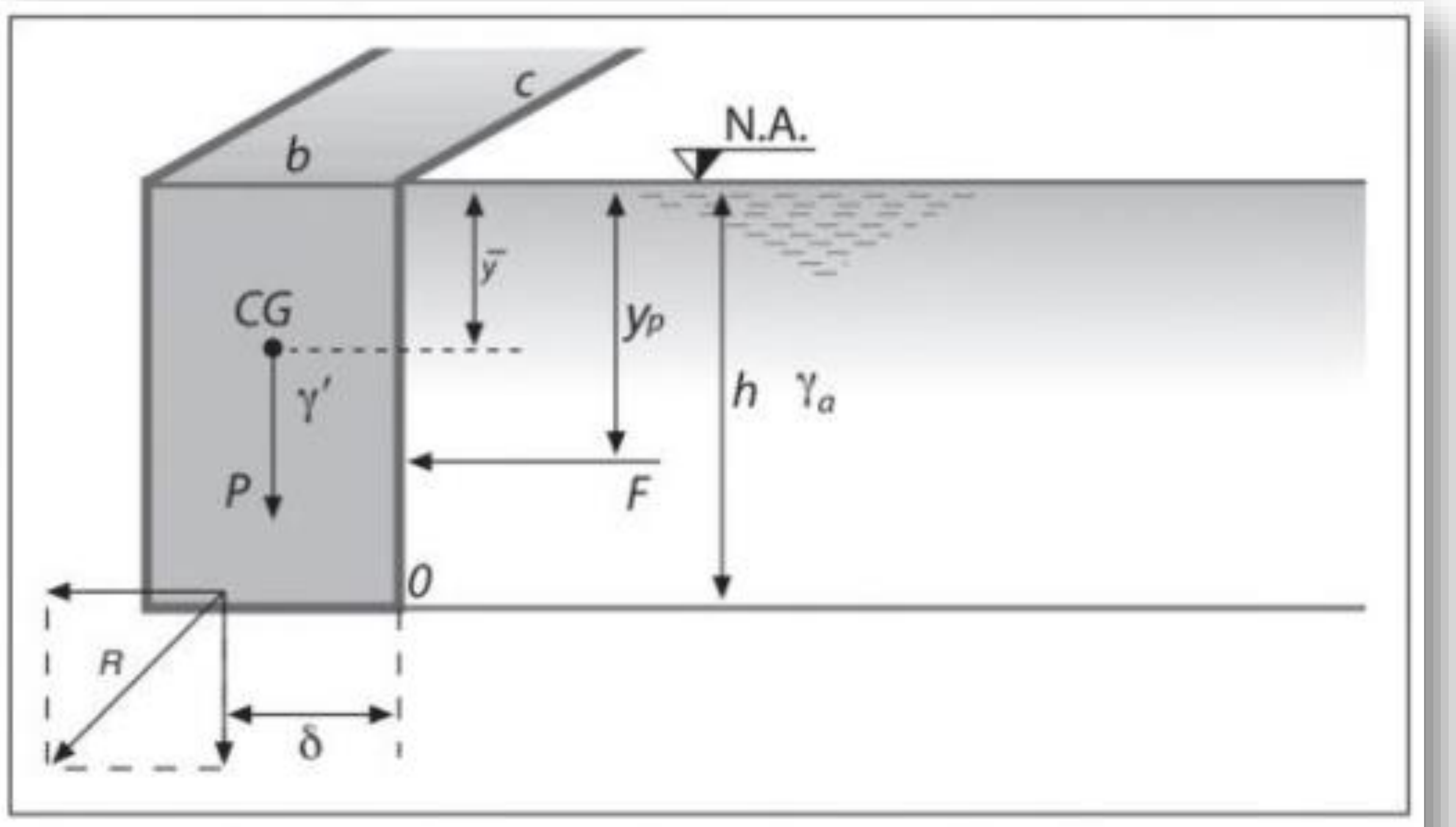


Figura A-2.7-a – Esforços em um muro de retenção.

c) Dimensionamento do muro

O muro deve resistir ao empuxo da água. Como se trata de alvenaria que não deve trabalhar à tração, a resultante das forças F e P deve cair no terço médio da base ($\delta = (2/3) \times b$). Tomando os momentos com relação ao ponto 0, **$b = h*(\gamma a/\gamma')^{0,5}$**

https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Exercício resolvido do livro Manual de Hidráulica

Deseja-se executar uma pequena barragem de concreto simples sobre uma camada de rocha. Calcular a largura mínima da base para que a barragem resista pelo seu próprio peso ao tombamento devido ao empuxo da água. Altura da barragem e profundidade da água: 1,30 m.

Fórmula: $b = h*(\gamma a/\gamma')^{0,5}$

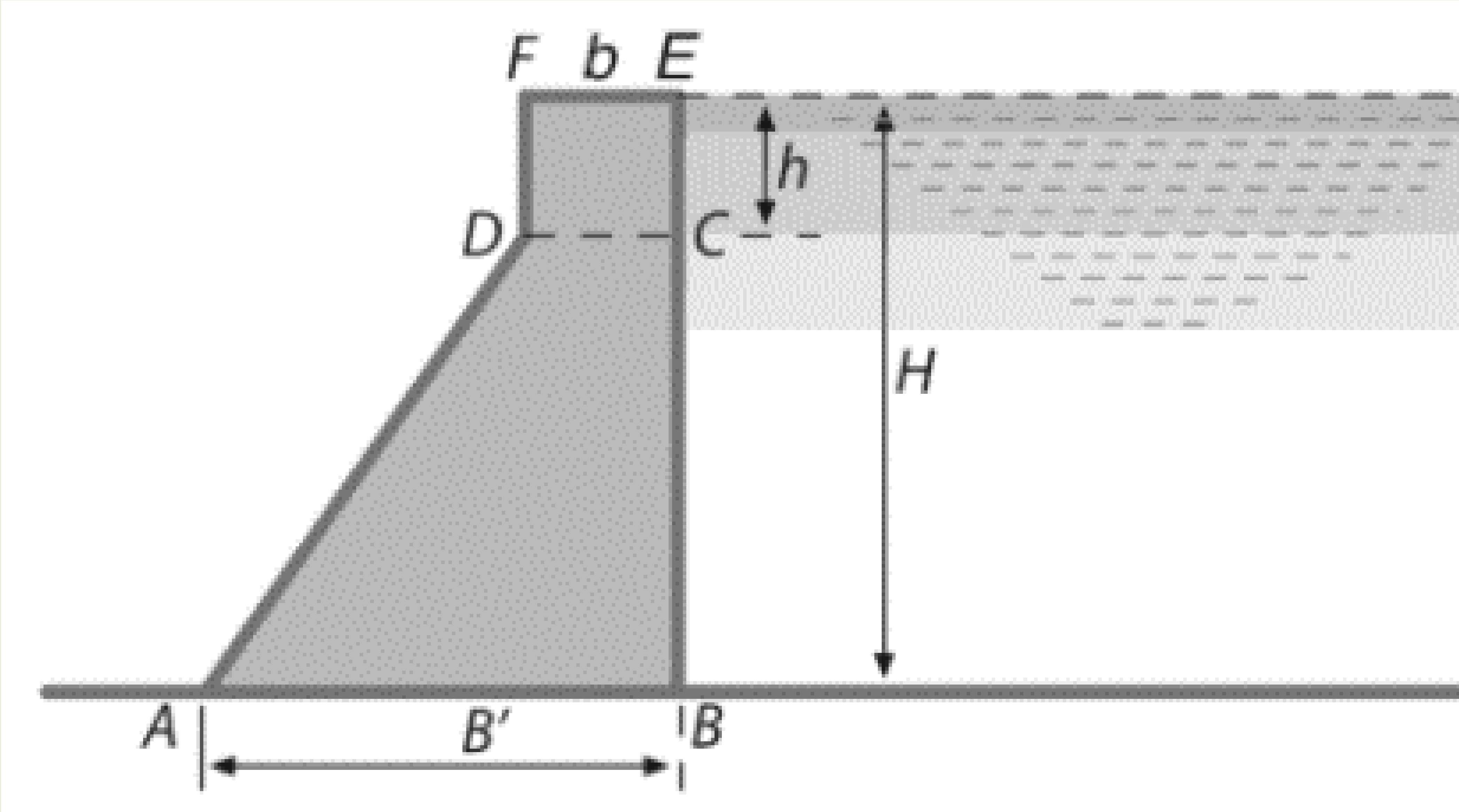
Solução:

Conforme calculado no *Exercício A-2-e*:

$$b = h \times \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma'}} = 1{,}30 \times \sqrt{\frac{1.000}{2.400}} = 1{,}30 \times \sqrt{0{,}42} = 0{,}84 \text{ m}$$

https://books.google.com.br/books/about/Manual_de_hidr%C3%A1ulica.html?id=ejtRDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=kp_read_button&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Pesquisem

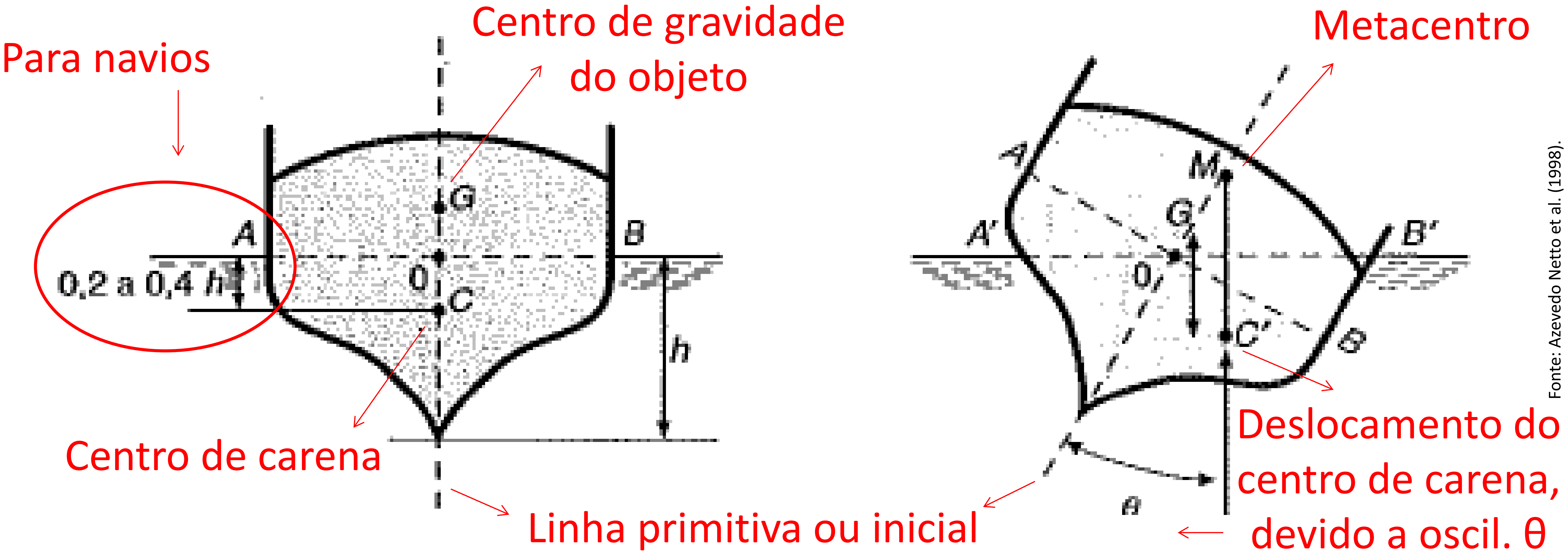


Fonte: Azevedo Netto et al. (1998).

Se a forma da barragem for a da figura abaixo, há alguma alteração nas equações e entendimentos para o formato anterior?

Equilíbrio de corpos flutuantes

- Um corpo flutua quando a ρ do corpo < ρ do fluido;
- O peso do objeto iguala-se ao peso do volume submerso;
- A parte imersa do objeto chama-se de **carena** ou querena;
- O **centro de carena** é o ponto de aplicação do empuxo;



Fonte: Azevedo Netto et al. (1998).

Equilíbrio de corpos flutuantes

- **Equilíbrio estável** – **M acima de G**; o objeto voltará a posição inicial após a oscilação que gera o ângulo θ;
  - **Neste caso, $\overline{MC} > \overline{CG}$**
- Equilíbrio instável – **M abaixo de G (ou seja $\overline{MC} < \overline{CG}$)**;
- Equilíbrio indiferente – **M no mesmo plano de G.**

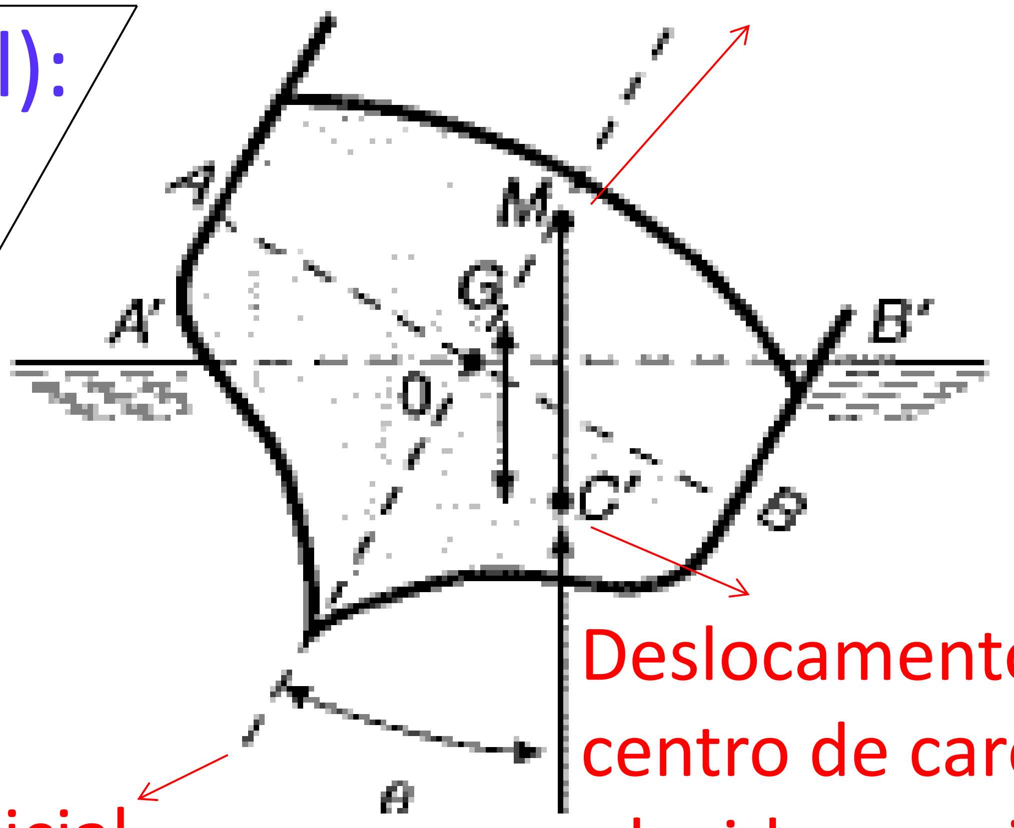
Cálculo do MC (aproximação de Duhamel):

$$\overline{MC} = \frac{I}{V}$$

I – momento de inércia da área que a superfície livre do líquido intercepta o objeto, sendo relativa ao eixo de inclinação (eixo sobre o qual se supõe que o corpo possa virar), m^4;

V – volume de carena, m^3.

Metacentro



Deslocamento do centro de carena, devido a oscil. θ

Linha primitiva ou inicial

Fonte: Azevedo Netto et al. (1998).

Exercício 3.1 — Seja um prisma retangular de madeira com as dimensões indicadas na (Fig. 3.2) e de densidade 0,82. Pergunta-se se o prisma flutuará ou não, em condições estáveis, na posição mostrada na figura.

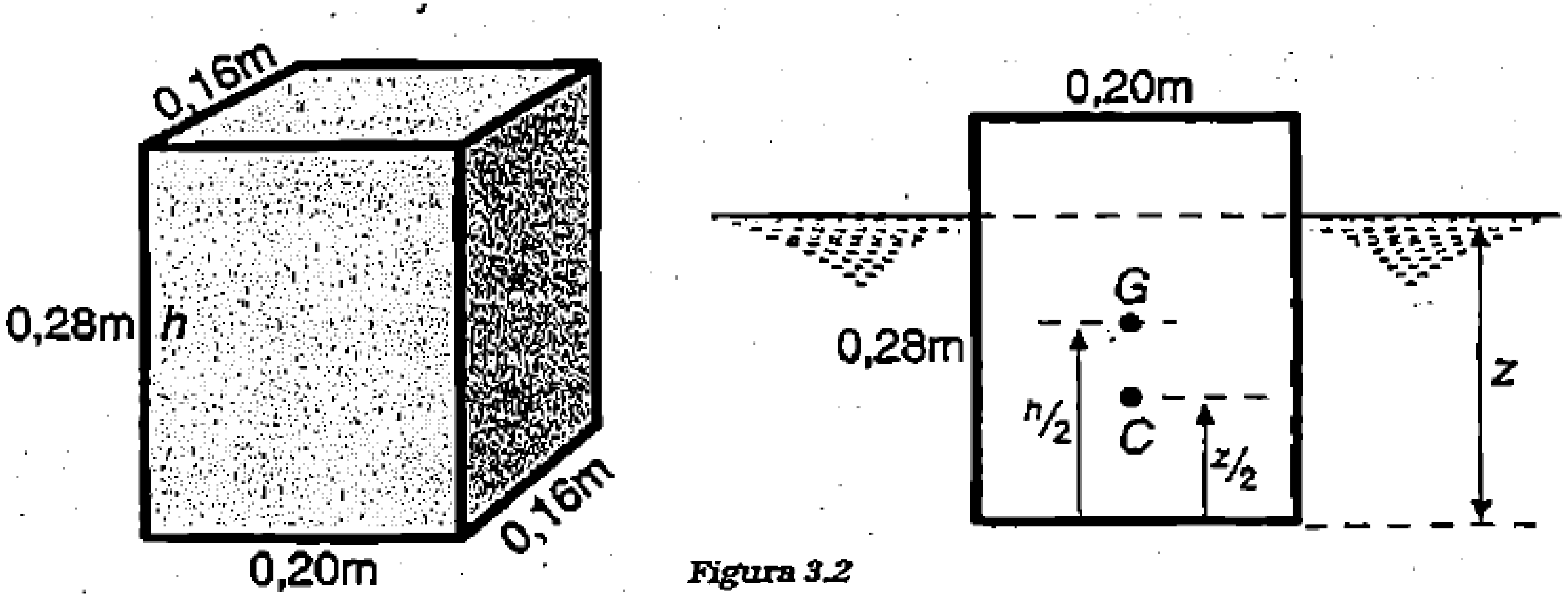


Figura 3.2

Calcula-se o volume de carena,

$$V = 0{,}20 \times 0{,}16 \times z;$$

da mesma forma, o peso do prisma,

$$P = 0{,}20 \times 0{,}16 \times 0{,}28 \times 0{,}82$$

$$z = \frac{0{,}20 \times 0{,}16 \times 0{,}28 \times 0{,}82}{1{,}00 \times 0{,}20 \times 0{,}16}$$

$$z = 0{,}28 \times 0{,}82 = 0{,}2296\ m$$

$$\overline{CG} = \frac{h}{2} - \frac{z}{2} = \frac{h - z}{2} = \frac{0{,}28 - 0{,}2296}{2} = 0{,}0252\text{m};$$

$$I = \frac{1}{12} bd^3 = \frac{1}{12} 0{,}20 \times 0{,}16^3;$$

$$\overline{MC} = \frac{I}{V} = \frac{0{,}20 \times 0{,}16^3}{12 \times 0{,}20 \times 0{,}16 \times 0{,}2296} = 0{,}0093\text{m};$$

Como: $\overline{MC} < \overline{CG}.$ *Equilíbrio instável*
Haverá tombamento

Como: $V \times 1{,}00 = P,$ *Então:* $1{,}00 \times 0{,}20 \times 0{,}16 \times z = 0{,}20 \times 0{,}16 \times 0{,}28 \times 0{,}82$

Fonte: Azevedo Netto et al. (

FIM